Un logaritmo. Due intervalli.

Prima di calcolare, chiediti dove la funzione esiste:

$$f(x) = \log\left(\frac{x+4}{x-2}\right).$$

1. La condizione. L'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo. Non basta controllare il numeratore.

$$\frac{x+4}{x-2} > 0.$$

2. I segni. Le soglie sono -4 e 2. A sinistra di -4, numeratore e denominatore sono *entrambi negativi*: il rapporto è positivo. Al centro è negativo; a destra di 2 è positivo.

3. I bordi. In -4 l'argomento vale zero; in 2 il denominatore è nullo. Entrambi i punti vanno esclusi.

$$\boxed{D = (-\infty, -4) \cup (2, +\infty).}$$

Il controllo utile. Prova $x = -5$: il rapporto vale $1/7 > 0$. Una risposta che esclude tutto il primo intervallo non può essere corretta.

Ora cambia un dato. Trova il dominio di $\log((x-2)/(x+5))$.

Controllo dopo il tentativo: $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$. Spiega perché anche qui ci sono due intervalli.

Esercizi originali di allenamento. Percorso indipendente, non affiliato al Politecnico di Torino.

Il limite arriva. Il massimo no.

Considera

$$A = \left\{ 4 - \frac{3}{n} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}.$$

1. Parti dal primo valore. Per $n = 1$ si ottiene 1. Quando n aumenta, $3/n$ diminuisce: i valori di $4 - 3/n$ crescono.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{n(n+1)} > 0.$$

2. Guarda il limite. La successione tende a 4, ma ogni suo termine è strettamente minore di 4.

$$a_n < 4, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 4.$$

3. Distingui raggiungere e avvicinarsi. Il primo valore è il minimo. Il valore 4 è il supremo, ma non appartiene all'insieme: non è un massimo.

$$\boxed{\min A = \inf A = 1, \quad \sup A = 4.}$$

Il massimo **non esiste**. Per qualunque numero minore di 4 trovi termini della successione più grandi: non può essere un maggiorante.

Ora cambia un dato. Studia gli estremi di $B = \{5 + 2/n : n \geq 1\}$.

Controllo dopo il tentativo: I termini decrescono: $\max B = \sup B = 7$ e $\inf B = 5$. Il minimo non esiste.

La domanda non è solo «a che cosa tende?», ma anche «quel valore viene raggiunto?»

Fra i due estremi c'è un valore decisivo.

Qual è l'immagine di

$$f(x) = x^2, \qquad x \in [-3, 2]?$$

1. Non trasformare solo i bordi. Agli estremi trovi $f(-3) = 9$ e $f(2) = 4$. Ma l'immagine non è l'intervallo fra 4 e 9.

2. Controlla l'interno. Lo zero appartiene all'intervallo e $f(0) = 0$. Un quadrato non è mai negativo: il minimo è proprio 0.

3. Trova il massimo. Il punto dell'intervallo più lontano da zero è -3: il massimo del quadrato è 9.

4. Giustifica i valori intermedi. La funzione è continua e sul tratto $[-3, 0]$ passa da 9 a 0. Non salta i valori in mezzo.

$$\boxed{f([-3, 2]) = [0, 9].}$$

Quando cambia la strategia? Se il vertice è fuori dall'intervallo, il minimo non è necessariamente zero. Prima localizza il vertice, poi confronta i valori.

Ora cambia un dato. Trova l'immagine di $(x - 2)^2$ per $x \in [-2, 5]$.

Controllo dopo il tentativo: Il vertice 2 è interno; gli estremi danno 16 e 9. L'immagine è $[0, 16]$.

Un esempio ti insegna una regola soltanto quando sai anche riconoscere dove non applicarla.

Una scorciatoia può cancellare il risultato.

Calcola

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+6}-x\right).$$

1. Riconosci la cancellazione. La radice è equivalente a x, ma sostituire entrambe le quantità con x perde il termine che determina il limite.

2. Usa un'identità esatta. Moltiplica e dividi per il coniugato:

$$x(\sqrt{x^2+6}-x)=\frac{6x}{\sqrt{x^2+6}+x}.$$

3. Semplifica la scala. Per x positivo, raccogli x dal denominatore:

$$\frac{6x}{\sqrt{x^2+6}+x}=\frac{6}{\sqrt{1+6/x^2}+1}.$$

4. Ora passa al limite. Il denominatore tende a 2:

$$\boxed{L=3.}$$

Ora cambia un dato. Sostituisci 6 con 10. Prima del conto, prevedi come cambia il limite.

Controllo dopo il tentativo: Il limite diventa 5. La forma generale con costante c dà $c/2$, quando l'espressione è definita per x sufficientemente grande.

Il valore nel buco si sceglie dopo il limite.

Per quale k la funzione è continua in 5?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}, & x \neq 5, \\ k, & x = 5. \end{cases}$$

1. Fattorizza. Per $x \neq 5$ vale

$$\frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = x + 5.$$

2. Calcola il limite. La formula semplificata vale vicino al punto, quindi

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 10.$$

3. Imposta la continuità. Il valore assegnato nel punto deve coincidere con il limite: $\boxed{k = 10}$. Scegliere un k diverso non cambia il limite, ma rompe la continuità.

Ora cambia un dato. Usa $(x^2 - 49)/(x - 7)$ per $x \neq 7$ e assegna $f(7) = k$.

Controllo dopo il tentativo: La continuità richiede $k = 14$. Giustificalo senza partire dalla risposta.

Vuoi lavorare così anche sulle prove più lunghe?
Programma e informazioni sul percorso di Analisi 1 con Andrea Marro:

andreamarro.it/lezioni/percorsi