Un esponenziale, un filtro

01 · Un esponenziale che si spegne: energia o potenza?

Negli appunti RC compare il decadimento esponenziale. **Lo studiamo qui come segnale**: $x(t) = Ae^{-t/\tau}u(t)$, con A reale, $\tau > 0$ e $u(t)$ gradino unitario. Questa applicazione ai segnali è una rielaborazione del modello manoscritto.

1. Usiamo la causalità. Il segnale è nullo per $t < 0$, dunque

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = A^2 \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt.$$

2. Calcoliamo la primitiva e il limite.

$$E_x = A^2 \Big[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \Big]_0^{\infty} = \frac{A^2 \tau}{2}.$$

Se $A = 2$ e $\tau = 0{,}5\,\mathrm{s}$, otteniamo $E_x = 1$ in unità di ampiezza al quadrato moltiplicata per secondi. Se x è una tensione, sono $\mathrm{V}^2\,\mathrm{s}$: i joule dissipati su un resistore si ottengono dividendo per la sua resistenza.

3. Distinguiamo la potenza media.

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = 0.$$

Il numeratore tende al valore finito E_x; il denominatore cresce senza limite. Non vuol dire che il segnale sia sempre nullo.

Controllo e pratica. Raddoppiare A quadruplica l'energia. Raddoppiare τ la raddoppia. L'energia raccolta fino a $t_0 \geq 0$ è $E_x(1 - e^{-2t_0/\tau})$: a $t_0 = \tau$ vale circa l'86,47% del totale.

Applicazioni rielaborate dal modello RC del Taccuino senza nome (61), pagine 30–31. Esempio di approfondimento: il PDF della tua lezione segue il lavoro svolto insieme.

Un esponenziale, un filtro

02 · Dal circuito RC alla risposta di un filtro.

Modello. Rielaboriamo l'equazione RC dei miei appunti come sistema lineare tempo invariante: $\tau\dot{y} + y = x$, con $\tau = RC > 0$. Ingresso x: tensione applicata; uscita y: tensione sul condensatore. Per la funzione di trasferimento assumiamo **condizioni iniziali nulle**.

1. Trasformiamo l'equazione. In Laplace:

$$\tau s Y(s) + Y(s) = X(s), \qquad H(s) = \frac{1}{1+\tau s}.$$

2. Torniamo nel tempo. Il polo è $-1/\tau$ e la risposta impulsiva causale è

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t).$$

Il controllo $\int_0^\infty h(t)dt = 1$ coincide con $H(0) = 1$.

3. Ricaviamo il gradino con la convoluzione. Per $x = u$ e $t \geq 0$:

$$y(t) = \int_0^t h(\lambda)d\lambda = 1 - e^{-t/\tau}.$$

Ritroviamo la carica del condensatore. Per $t < 0$, $y = 0$.

4. Passiamo alla frequenza.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}, \qquad \arg H(j\omega) = -\arctan(\omega\tau).$$

Alla pulsazione $\omega_c = 1/\tau$ il modulo è $1/\sqrt{2}$ e la fase $-45°$. La frequenza in hertz è $f_c = 1/(2\pi\tau)$: non confondiamola con la pulsazione.

Riprova. Per $\tau = 0{,}01\,\text{s}$: $f_c \approx 15{,}92\,\text{Hz}$. Raddoppiando τ, il taglio si dimezza. Questi conti estendono il modello originale ai filtri.

Applicazioni rielaborate dal modello RC del Taccuino senza nome (61), pagine 30–31. Esempio di approfondimento: il PDF della tua lezione segue il lavoro svolto insieme.