Integrale di superficie

01 · Impostazione e fattore di area

Un integrale di superficie somma contributi su una superficie nello spazio. Prima del calcolo distinguiamo due oggetti: la superficie Σ e il dominio piano D che la descrive.

Se la superficie è il grafico $z = f(x, y)$, possiamo parametrizzarla con $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Il piccolo rettangolo $dx\,dy$ diventa un pezzetto di superficie di area

$$dS = \|r_x \times r_y\|\,dx\,dy.$$

Il foglio originale costruisce proprio questo passaggio. Per un campo scalare usiamo la **norma** del prodotto vettoriale: qui non stiamo calcolando un flusso orientato.

La domanda da farsi è: quanto si dilata l'area passando dal piano alla superficie? Quel fattore deve rimanere nel conto.

L'esercizio chiede di calcolare

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{xy^2}{\sqrt{1 + 5z^2}}\,dS,$$

sulla superficie $z = e^{2x+y}$, con $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 2$.

La parametrizzazione è $r = (x, y, e^{2x+y})$. Deriviamo rispetto a una variabile alla volta:

$$r_x = (1, 0, 2e^{2x+y}), \qquad r_y = (0, 1, e^{2x+y}).$$

Il prodotto vettoriale vale $(-2e^{2x+y}, -e^{2x+y}, 1)$. La sua norma è $\sqrt{1 + 5e^{4x+2y}}$.

Il fattore 5 non arriva da una formula da ricordare: in questo caso è $2^2 + 1^2$, la somma dei coefficienti al quadrato delle due derivate.

Rielaborazione degli appunti originali «OK!», pagine 5–8. Esempio di approfondimento: il PDF della tua lezione segue il lavoro svolto insieme.

Integrale di superficie

02 · Calcolo e controllo

Ora sostituiamo $z = e^{2x+y}$ **anche nell'integranda**. Otteniamo

$$\frac{xy^2}{\sqrt{1+5e^{4x+2y}}}\sqrt{1+5e^{4x+2y}} = xy^2.$$

I due fattori si cancellano perché sono identici e strettamente positivi. Senza il fattore di area, invece, il risultato sarebbe diverso.

Resta un integrale doppio sul rettangolo:

$$I = \int_0^2 \int_0^1 xy^2 \, dx \, dy.$$

Nel foglio si vede prima la formula completa e soltanto dopo la cancellazione. È una buona abitudine: rende controllabile ogni scelta e aiuta a ritrovare un fattore dimenticato.

Nell'integrale interno y è costante. Quindi

$$\int_0^1 xy^2 \, dx = \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{y^2}{2}.$$

Poi integriamo rispetto a y:

$$I = \int_0^2 \frac{y^2}{2} \, dy = \left[\frac{y^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Possiamo verificarlo separando i fattori sul rettangolo: $\left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^2 y^2\,dy\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$.

Anche il segno torna: x e y^2 sono non negativi. Se fosse comparso un risultato negativo, avremmo saputo subito di dover ricontrollare il conto.

Riprova. Sul rettangolo $[0,2]\times[0,1]$, lasciando uguali superficie e integranda, il fattore di area si cancella ancora. Il risultato diventa $\left(\int_0^2 x\,dx\right)\left(\int_0^1 y^2\,dy\right) = 2/3$.

Rielaborazione degli appunti originali «OK!», pagine 5–8. Esempio di approfondimento: il PDF della tua lezione segue il lavoro svolto insieme.