Stabilità e rapidità

01 · Routh: l’intervallo stabile

Il denominatore è $D(s) = s^3 + 4s^2 + (p-20)s + 2p$. La prima colonna della tabella di Routh, nella forma normalizzata, è

$$1, \quad 4, \quad \frac{p-40}{2}, \quad 2p.$$

Nel foglio la terza riga è riscalata di un fattore positivo: per studiare i segni è equivalente. Per la stabilità asintotica tutti gli elementi devono essere positivi. Otteniamo $p > 40$ e $p > 0$, dunque basta $p > 40$. Il bordo $p = 40$ va controllato a parte: nella tabella di Routh compare il **caso speciale della riga nulla** (la riga s^1). Compare una coppia di poli sull’asse immaginario, perciò non appartiene all’intervallo stabile.

Il termine della riga s^1 si ottiene da $[4(p-20) - 2p]/4 = (p-40)/2$. La positività dei soli coefficienti del denominatore darebbe $p > 20$, ma non sarebbe sufficiente: Routh impone il vincolo più forte. Per $p = 40$ il denominatore si fattorizza in $(s+4)(s^2+20)$; i poli immaginari non decadono. Il numeratore $4s + 2$ non li cancella.

Rielaborazione del manoscritto di Routh (Senza Titolo 403, pagina 5) e del modello RC (Taccuino 61, pagina 31). Esempio di approfondimento: il PDF della tua lezione segue il lavoro svolto insieme.

Stabilità e rapidità

02 · Primo ordine: il tempo di assestamento

Modello. Rielaboriamo il transitorio RC dei manoscritti come $H(s) = 1/(1 + \tau s)$, con $\tau > 0$, condizioni iniziali nulle e ingresso a gradino unitario. È un modello del primo ordine senza ritardo.

1. Studiamo il polo. L'equazione $1 + \tau s = 0$ dà $s = -1/\tau < 0$. La risposta libera decade: il sistema è asintoticamente stabile. Inoltre la risposta impulsiva è assolutamente integrabile, quindi il sistema è BIBO stabile.

2. Scriviamo risposta ed errore. Per $t \geq 0$, $y(t) = 1 - e^{-t/\tau}$ e l'errore rispetto al valore finale è $e(t) = e^{-t/\tau}$. La derivata è positiva: la risposta cresce senza sovraelongazione.

3. Imponiamo la tolleranza del 2%.

$$e^{-t/\tau} \leq 0{,}02.$$

Prendiamo il logaritmo, poi moltiplichiamo per $-\tau$ invertendo il verso:

$$t \geq -\tau \ln(0{,}02) \approx 3{,}912\tau.$$

Il valore 4τ è una comoda approssimazione. Poiché l'errore diminuisce sempre, da quell'istante resta nella fascia.

4. Applichiamo e verifichiamo. Per $\tau = 0{,}2\,\mathrm{s}$, il polo è $-5\,\mathrm{s}^{-1}$ e il tempo esatto è circa $0{,}7824\,\mathrm{s}$. Sostituendolo nell'esponenziale si ritrova $0{,}02$.

Riprova. Dimezzando τ, il polo diventa $-10\,\mathrm{s}^{-1}$ e il tempo si dimezza. La stabilità resta, cambia la rapidità. Per sistemi con più poli o sovraelongazione questo criterio va ricalcolato.

Rielaborazione del manoscritto di Routh (Senza Titolo 403, pagina 5) e del modello RC (Taccuino 61, pagina 31). Esempio di approfondimento: il PDF della tua lezione segue il lavoro svolto insieme.